УДК 519.7

А.С. Сенченко, Н.Н. Рубан
Славянский государственный педагогический университет, Украина

Алгебраическое представление детерминированных графов

В статье предлагается задание детерминированных инициальных графов с помощью определяющей пары, первая компонента которой однозначно задает базу графа, а вторая дополняет базу до заданного графа. Предложена процедура построения графа по его определяющей паре, а также процедура построения минимальной определяющей пары графа, названной канонической. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем исследовании детерминированных графов, в частности при проведении экспериментов с графами с использованием блуждающих по ним агентов.

Введение

Известно, что многие объекты дискретной математики и алгебры можно представить определяющими соотношениями. Так в 1882 году В. Фон Дик предложил задавать группы посредством порождающих элементов и определяющих соотношений [1]. Впоследствии было предложено аналогичное задание полугрупп.

В связи с таким заданием выше перечисленных объектов возникли знаменитые проблемы Туэ-Дэна [2], самой сложной из которых является проблема изоморфизма: две полугруппы/группы заданы системой определяющих соотношений (СОС), необходимо найти алгоритм, позволяющий по СОС определить, изоморфны ли полугруппы/группы друг другу или нет.

В 1947 году была доказана неразрешимость проблем Туэ-Дэна: А.А. Марковым и Эм. Постом для полугрупп [3], а чуть позднее, в 1955, П.С. Новиков и У. Бун доказали неразрешимость для групп.

В 1961 Ю.И. Соркин в работе [4] сформулировал и предложил позитивное конструктивное решение проблем Туэ-Дэна для детерминированных всюдуопределенных автоматов. Тем самым была показана принципиальная возможность использования СОС при решении задач теории автоматов. В дальнейшем идеи Соркина обобщаются и используются для исследования проблем теории экспериментов с конечными автоматами и лабиринтами.

В частности в работе [5] предложен частный случай решения проблемы изоморфизма всюдуопределенных автоматов без непосредственного построения автоматов по их системе определяющих соотношений, а в работе [6] аналогичным образом решена проблема для частичных автоматов.

В связи с определенной схожестью структуры графов и автоматов возникает идея распространить результаты А.С. Сенченко на графы. Наиболее схожими по структуре с автоматами, на наш взгляд, являются графы с детерминированной раскраской (детерминированные графы), впервые рассмотренные С.В. Сапуновым в [7].

1. Основные определения

Под автоматом понимается конечный детерминированный инициальный инициально-связный частичный автомат без выхода [8]. Будем считать, что $A=(A,X,\delta,a_0)$ – автомат, у которого A – конечное множество состояний, a_0 – начальное состояние,

$\delta : A \times X \to A$ – функция переходов. Множество всех слов конечной длины в алфавите X обозначается X^*. Пусть $p = x_1 \dots x_k$ – произвольное слово в алфавите X. Слово $x_k \dots x_1$ будем обозначать через p^{-1}. Длина слова p обозначается $d(p)$ и $d(p) = k$.

Одним из известных способов задания автоматов является его представление определяющими соотношениями, то есть такими парами слов (p,q), что $a_0 p$ и $a_0 q$ определяют одно и то же состояние. Множество таких определяющих соотношений, однозначно задающих автомат, называется его системой определяющих соотношений. Для частичных автоматов в работе [6] была введена модификация СОС, названная определяющей системой, которая состоит из двух компонент $\{\rho, M\}$. Первая ее компонента ρ, состоящая из таких пар слов (p,q), что $a_0 p$, $a_0 q$ определены и $a_0 p = a_0 q$, является аналогом СОС и однозначно задает базу [4] автомата. Вторая компонента M состоит из таких слов px, где $x \in X$, что $a_0 p$ определено, а $a_0 px$ не определено. Она однозначно выделяет автомат от других подобных ему по свободному расширению [4]. В работах [5], [6], [9] были решены задачи, связанные с представлением автоматов определяющими соотношениями: найдена минимальная СОС для автомата; найдено преобразование (редукция) СОС, позволяющее определить, соответствует ли данная СОС данному автомату; соответствуют ли две данные СОС одному и тому же автомату. Для распространения этих результатов на схожие по структуре объекты с автоматами – детерминированные графы – необходимо ввести на них аналог СОС.

Пусть $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ – конечный, простой неориентированный граф с отметками вершин, у которого G – множество вершин, E – множество ребер, C – множество отметок вершин, $\psi : G \to C$ – функция отметок, g_0 – инициальная вершина. Окрестностью вершины $O(g)$ называется вершина g вместе с множеством всех вершин, смежных с ней: $O(g) = \{g\} \cup E\{g\}$. Граф $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ называется детерминированным [7], если у любых двух различных вершин из любой окрестности отметки различны, то есть $\forall g \in G,\ u, v \in O(g)$ из $u \neq v$ следует $\psi(u) \neq \psi(v)$. Путем в детерминированном графе $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ будем называть произвольную последовательность отметок вершин $p = \psi(g_1) \dots \psi(g_k)$, где $(g_i, g_{i+1}) \in E$, для всех $1 \le i < k$. Если в окрестности вершин v нет вершины с отметкой c, то будем говорить, что путь по c из v не определен, в противном случае путь определен. В работе рассматриваются только связные графы.

Пусть $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ – детерминированный граф. Удалим из G все висячие вершины, отличные от инициальной g_0. Будем повторять данную операцию до тех пор, пока это возможно. Получившийся граф назовем базой графа G. Опишем вершины, входящие в базу графа. База может состоять из одной инициальной вершины, если граф является деревом. Если же граф не дерево, то в базу входят только те вершины, через которые проходит некоторый простой цикл и вершины, через которые проходит путь от начальной вершины к некоторому простому циклу.

2. Определяющие слова для детерминированных графов

Пусть $\{S, L\}$ – пара конечных множеств слов, таких, что для любого слова p из множества S выполняется равенство $g_0 p = g_0$, а для любого слова $q \in M$ путь $v_0 q$ определен, и соответствующая вершина является висячей. Рассмотрим процедуру построения графа по паре множеств $\{S, L\}$:

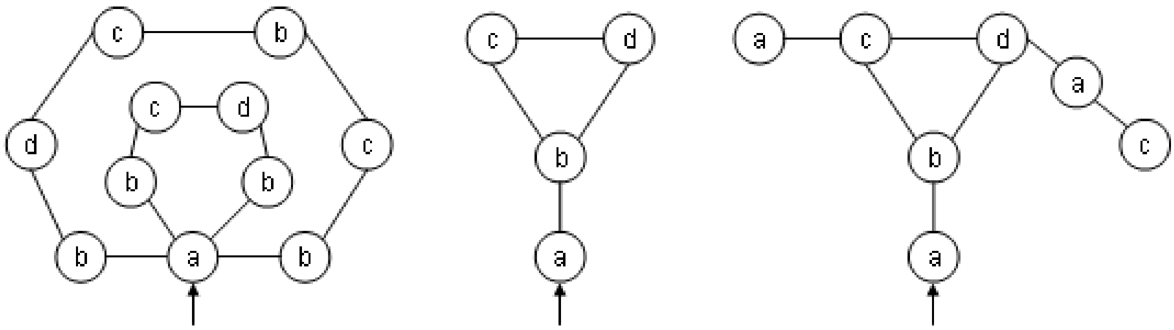
1. Строим циклы по словам множества S и в любом случае получаем граф с раскрашенными вершинами, причем детерминированность раскраски не обязательно выполняется.

2. Осуществляется детерминизация полученного графа путем отождествления вершин с одинаковой раскраской из каждой окрестности. Ввиду конечности множества S данная операция выполняется конечное число раз и результат однозначен.

3. К полученному графу, используя элементы множества L, добавляем «тупиковые» ветки. При необходимости осуществляем повторную детерминизацию.

Пару $\{S, L\}$ назовем определяющей для детерминированного графа G, если она однозначно его задает. Определяющая пара является аналогом определяющей системы для частичных автоматов, рассмотренных в [6]. Проиллюстрируем ход выполнения вышеуказанной процедуры на следующем примере.

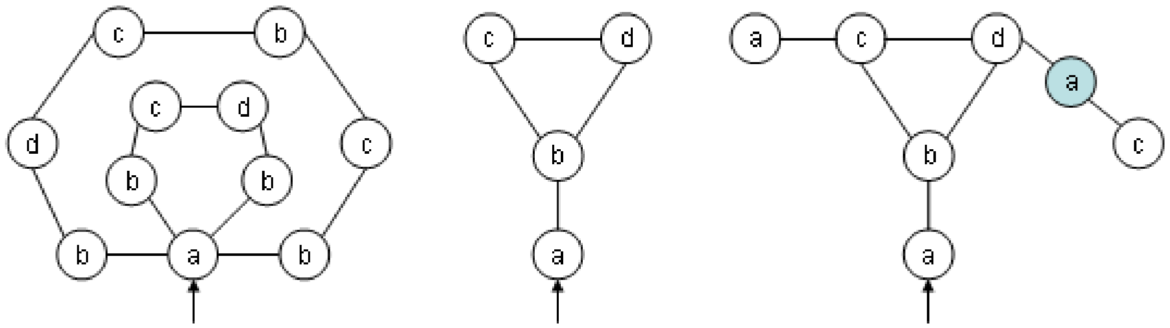
Пример 1. Пусть $S = \{abcdba; abdcbcba\}$ и $L = \{abdca; abdac; abcdac\}$, тогда в ходе выполнения процедуры последовательно получаем такие графы:



Детерминизацию можно осуществлять один раз, то есть шаг 2 выполнять после шага 3, но на наш взгляд лучше ее проводить после анализа каждого слова множеств S и L.

Не всякая пара множеств $\{S, L\}$ задает граф. Потому что вершина, соответствующая некоторому слову множества L, может быть не висячей. Приведем пример таких множеств S и L, которые не являются определяющими ни для какого графа.

Пример 2. Пусть $S = \{abcdba; abdcbcba\}$ и $L = \{abdca; abdac; abcda\}$, тогда шаги 1 и 2 приведут к аналогичному результату, первые два слова множества L строят граф такой же, как и в предыдущем примере, а вершина соответствующая третьему слову (она выделена) – не висячая, так как ее степень равна двум.



В дальнейшем предполагается формализировать условия для множеств S и L, для которых пара $\{S, L\}$ является определяющими словами для некоторого детерминированного графа.

3. Построение по графу его определяющей пары

Покажем, что каждый детерминированный граф имеет хотя бы одну определяющую пару.

Пусть $C = \{c_1,...,c_m\}$ и $c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_m$ – произвольно зафиксированный линейный порядок P на C. Введем линейный порядок $\le$ на множестве C^* всех слов в алфавите C таким образом:

1) $c_i \le c_i$; 2) если $d(p) < d(q)$, то $p \le q$; 3) $c'_1 \ldots c'_s = p \le q = c''_1 \ldots c''_s$, если $c'_k \le c''_k$ для некоторого $k \le s$, в то время как $c'_1 = c''_1, \ldots, c'_{k-1} = c''_{k-1}$.

Другими словами, слово меньшей длины предшествует слову большей длины, а слова одинаковой длины сравниваются в соответствии с лексикографическим порядком (по алфавиту). Очевидно, что порядок $\le$ на C^* однозначно определяется некоторым порядком P на C.

Каждую вершину графа G именуем кратчайшим по введенному порядку $\le$ словом, соответствующим ей, то есть строим кратчайший по порядку $\le$ базис достижимости. Полученное множество имен вершин обозначим через V_G. Заметим, что в силу минимальности имен вершин любой начальный отрезок любого слова из V_G тоже принадлежит базису достижимости V_G.

Для всех слов $p = p'c'c \in V_G$ и всех отметок c'', отличных от c', если путь $p'c'cc''$ определен и соответствует невисячей вершине с именем $q = q'c''$ и $p'c'cc'' \ne q'c''$, то циклическое слово $pc''(q')^{-1}$ помещаем в множество Σ_1, если же соответствующая вершина является висячей (ее имя будет pc''), то слово pc'' помещаем в множество Λ_G. Затем в множестве Σ_1 из всех пар обратных слов p и p^{-1} оставляем одно кратчайшее по порядку $\le$, а другое исключаем. Получившееся множество обозначим через Σ_G. Заметим, что если слово p принадлежит Σ_G, то для любого его начального отрезка p' вершина, соответствующая слову p', содержится в базе графа G.

Теорема 1. *Пара $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ является определяющей для графа G.*

Доказательство. По паре $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ построим детерминированный граф G'. Покажем, что графы G и G' изоморфны.

Пусть вершина g с именем p принадлежит базе графа G. Тогда по построению Σ_G в нем существует такое слово q, для которого p или p^{-1} является начальным отрезком. Поэтому g принадлежит базе графа G' и имя вершины g есть слово p.

Пусть вершина g принадлежит базе графа G'. Тогда либо через эту вершину проходит некоторый простой цикл, либо через нее проходит путь к некоторому простому циклу. Рассмотрим первый случай: пусть $V_{G'}$ – базис достижимости графа G' и $p \in V_{G'}$ – имя вершины g в этом базисе. Тогда существует такое слово q, что $g_0 p = g_0 pq$. Поскольку $pq \notin V_{G'}$, то существует такой начальный отрезок wc слова pq, что $w \in V_{G'}$, а $wc \notin V_{G'}$. Пусть r – такое слово из базиса $V_{G'}$, что $g_0 r = g_0 wc$.

Тогда по построению Σ_G меньшее из слов $wc(r)^{-1}$ и $r(wc)^{-1}$ по порядку $\le$ принадлежит Σ_G, следовательно, g принадлежит базе графа G и имя вершины g есть слово p.

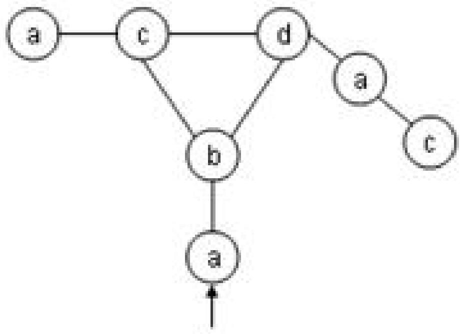
Рассмотрим второй случай. Пусть p – имя вершины g в базисе $V_{G'}$. Тогда существуют такие слова q и z, что $pz \in V_{G'}$ и $g_0 pz = g_0 pzq$. Поскольку $pzq \notin V_{G'}$, то существует такой начальный отрезок wc слова pzq, что $w \in V_{G'}$, а $wc \notin V_{G'}$. Пусть r – такое слово из базиса $V_{G'}$, что $g_0 r = g_0 wc$. Тогда, так же, как и в первом случае, по построению Σ_G меньшее из слов $wc(r)^{-1}$ и $r(wc)^{-1}$ по порядку $\le$ принадлежит Σ_G, следовательно, g принадлежит базе графа G и имя вершины g есть слово p. Таким образом доказано, что базы графов G и G' совпадают.

Пусть теперь вершина g графа G не принадлежит его базе и пусть $p \in V_G$ – имя вершины g. Тогда из конечности графа G следует, что существует такое слово q, что $pq \in \Lambda_G$, поэтому вершина g с именем p принадлежит графу G' и не находится в его базе. Обратно, пусть вершина g графа G' не принадлежит его базе и $p \in V_{G'}$ – имя вершины g. Тогда по построению графа G' существует такое слово q, что $pq \in \Lambda_G$, следовательно, вершина g с именем p принадлежит графу G и не находится в его базе. Таким образом, показано, что графы G и G' изоморфны. Теорема доказана.

Определяющую пару $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ назовем канонической для G. Из минимальности длин слов из базиса достижимости V_G и минимальности циклических слов базиса достижимости Σ_G вытекает

Следствие 1. *Каноническая определяющая пара* $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ *является минимальной по длине слов определяющей парой для графа* G.

Пример 3. Для заданного графа канонической определяющей парой являются $\Sigma_G = \{abcdba\}$ и $\Lambda_G = \{abca; abdac\}$.



Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложено представление детерминированных графов определяющей парой, которая является аналогом системы определяющих соотношений. Найдены процедура построения графа по его определяющей паре и процедура построения минимальной (канонической) определяющей пары для

графа. Полученные результаты являются распространением соответствующих задач теории автоматов на графы и могут быть использованы при проведении диагностических и контрольных экспериментов с детерминированными графами.

Литература

1. Чандлер Б., Магнус В. Развитие комбинаторной теории групп. – М.: Мир, 1985. – 255 с.
2. Адян С.И., Дурнев В.Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи математических наук. – 2000. – Т. 55, вып. 2. – С. 3-94.
3. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985. – 440 с.
4. Соркин Ю.И. Теория определяющих соотношений для автоматов // Проблемы кибернетики. – 1961. – Вып. 9. – С. 45-69.
5. Грунский И.С., Сенченко А.С. Каноническая система определяющих соотношений для автоматов // Труды института прикладной математики и механики. – 2002. – Т. 7. – С. 58-63.
6. Сенченко А.С. Свойства определяющих систем для частичных автоматов // Труды института прикладной математики и механики. – 2003. – Т. 8. – С. 111-119.
7. Сапунов С.В. Эквивалентность отмеченных графов // Труды института прикладной математики и механики. – 2002. – Т. 7. – С. 162-167.
8. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука, 1997. – 368 с.
9. Сенченко А.С. Представление автоматов определяющими соотношениями их поведения: Дис… канд. физ.-мат. наук. – К.: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, 2005.

О.С. Сенченко, Н.Н. Рубан

Алгебраїчне зображення детермінованих графів

У роботі запропоновано задання детермінованих графів за допомогою визначальної пари, перша компонента якої однозначно задає базу графа, а друга доповнює базу до заданого графа. Запропоновано процедуру побудови графа за його визначальною парою, а також процедуру побудови мінімальної (канонічної) визначальної пари графа. Отримані результати можуть бути використані в подальшому дослідженні детермінованих графів, зокрема при проведенні експериментів із графами з використанням блукаючих по ним агентів.

A.S. Senchenko, N.N. Ruban

The Algebraic Representation of Deterministic Graphs

In this paper is proposed a task of deterministic graphs with the help of a defining pair, the first component of which specifies the base graph, and the second supplements base a given graph. Proposed procedure for constructing a graph on his defining pair, and procedure for constructing the minimum pair graph, called canonical. The results can be used for further study of deterministic graphs, in particular because of experiments with graphs using agents wandering on them.

Статья поступила в редакцию 01.07.2008.